Der Spektralsatz und Hadamards Determinantenproblem

Louis Pinhack

19. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Auf der Suche nach dem einfachsten Weg, Gleichungssysteme zu lösen, stößt man in diesem Zusammenhang unter Verwendung von Matrizen häufig auf den Spektralsatz. Was genau dieser Satz besagt und wie wir ihn benutzen werden, um uns mit einem ungelösten mathematischem Problem von Jacques Hadamard zu beschäftigen, möchte ich gerne in dieser Ausarbeitung zeigen. Der tatsächliche Spektralsatz ist allerdings auch in anderen Formen in der Literatur zu finden. Die hier verwendete Version dient lediglich dazu, den Beweis zu demonstrieren und den Satz später anwenden zu können.

2 Der Spektralsatz

Satz 1. *Für jede reelle Symmetrische Matrix A gibt es eine reelle orthogonale Matrix Q, sodass Q^TAQ Diagonalgestalt hat.*

Nutzt man nun die Tatsache, dass für orthogonale Matrizen $Q^{-1} = Q^T$ (da $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} | Q^TQ = E\ \}$) gilt, kann man durch Umformungen zu der Form $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_t P_t$ kommen. Das bedeutet, dass man A auch als Summe der λ_i-fache Projektion auf die von P_i erzeugten Matrizen schreiben kann. In dieser Form ist der Satz bereits häufiger in der Literatur zu finden. Nun wird einer von vielen Beweisen des Satzes gezeigt. Dieser Beweis wurde von Herb Wilf geführt.

2.1 Beweis

Beweis 1. *Nach Wilf wird eine stetige Funktion auf der kompakten Menge der reellen orthogonalen Matrizen gesucht, welche dann nach K. Weierstrass ihre Extrema annehmen muss. Um dies zu nutzen wird eine Funktion $Od(A)$ mit der Vorschrift $Od(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, Od(A) = \sum_{i\neq j} a_{ij}^2$ definiert. Diese gibt also die Summe der quadrierten Nichtdiagonalelemente von einer reellen Matrix (A) an. Damit eine Matrix diagonal ist, muss dieser Wert also gleich null sein. Um nun mit dem tatsächlichen Beweis zu beginnen wird außerdem festgehalten, dass die Menge $O(n) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Gruppe ist, da*

$$(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1} = Q^TP^T = (PQ)^T.$$

Zudem folgt die Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $O(n)$ sofort, wenn man die Eigenschaft $QQ^T = E$ nutzt: Für den $(1, 1)$-Eintrag wird die erste Zeile von Q mit *der ersten Spalte von Q^T, welche wieder die erste Zeile von Q ist, skalarmultipliziert und es ergibt sich die Gleichung*

$$q_{i1}q_{j1} + q_{i2}q_{j2} + \ldots + q_{in}q_{jn} = \delta_{ij}, \text{ für } 1 \leq i, j \leq n$$

wobei q_{ij} die Einträge von Q sind. Für $i = j$ gilt

$$q_{i1}^2 + \ldots + q_{in}^2 = 1, \text{ für } 1 \leq i \leq n$$

und somit ist $|q_{ij}^2| \leq 1$, also ist $q_{ij} \in [-1, 1]$ und somit ist $O(n)$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt.
Unter Verwendung von Lemma 2.2. ist es nun möglich, für jede Matrix A verallgemeinert zu argumentieren:

- *Da die Abbildung $f_A\colon O(n) \to \mathbb{R}^{n\times n}, P \mapsto P^TAP$ stetig ist und ihr Definitionsbereich kompakt ist, ist ihr Bild nach K. Weierstrass in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ebenfalls kompakt.*
- *Lässt man $Od\colon f_A(O(n)) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ nun diese kompakte Menge als Definitionsbereich übernehmen, so muss Od ihre Extrema annehmen. Hier ist vor allem das Minimum von Interesse. Dieses nennt man $D = Q^TAQ \in f_A(O(n))$.*
- *Da D das Minimum von Od ist, muss $Od(D) = 0$ gelten.*

Ein schneller Widerspruch zeigt, dass es für $Od(D) > 0$ ein $U \in O(n)$ geben müsste, sodass $Od(U^TDU) < Od(D)$. Dies führt aber wegen $D = Q^TAQ$ und der Gruppeneigenschaften von $O(n)$ dazu, dass man mit $QU \in O(n)$ das Minimum erreichen würde, welches aber bereits D war.

Dieser Beweis ging mit den richtigen Werkzeugen also schnell. Allerdings verlässt man sich bis jetzt noch auf das noch nicht bewiesene Lemma, was nun folgt.

2.2 Das verwendete Lemma und Beweis

Lemma 1. *Wenn eine reelle symmetrische $(n \times n)$-Matrix A nicht schon Diagonalgestalt hat, also $Od(A) > 0$, dann gibt es eine Matrix $U \in O(n)$ mit $Od(U^TAU) < Od(A)$.*

Um das Lemma zu beweisen reicht es aus, sich eine Matrix A so zu wählen, dass mindestens ein Eintrag genau nicht verschwindet. Nach der Wahl einer entsprechenden Matrix U reicht es dann zu zeigen, dass fast alle Einträge aus der Matrix $B = U^TAU$ gleich mit denen aus A sind, der gewählte Eintrag allerdings verschwindet. Insofern der gewählte Eintrag nicht auf der Diagonalen von A lag, gilt dann $Od(U^TAU) < Od(A)$, was gefragt ist.

Beweis 2. *Man wähle nun die Matrix A so, dass ein beliebiger Nichtdiagonaleintrag nicht verschwindet, also für* $A = (a_{ij})$ *sei* $a_{rs} \neq 0$ *für* $r \neq s$. *Außerdem sei die Matrix* U *definiert durch*

$$U = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& cos(\theta) &&&& sin(\theta) &&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&&&& \ddots &&&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& -sin(\theta) &&&& cos(\theta) && \\ &&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix},$$

sodass sich für jede Wahl des Winkels θ *eine Orthogonalmatrix ergibt. Nun ist es möglich, jeden Eintrag* $(b_{ij}) = B = U^T AU$ *aus* B *durch*

$$b_{kl} = \sum_{i,j} u_{ik} a_{ij} u_{jl} \tag{1}$$

zu errechnen. Da alle Einträge von U *außerhalb der Zeilen und Spalten* r, s $1 oder 0$ *sind, ergibt sich für* $k, l \notin \{r, s\}$, *dass* $b_{kl} = a_{kl}$ *gilt. Nun sind die meisten Einträge von* B *bereits genau gleich denen von* A. *Des weiteren folgt nach der gleichen Berechnung, dass*

$$b_{kr} = a_{kr}cos(\theta) + a_{ks}sin(\theta),\ \ f\ddot{u}r\ \ k \neq r, s$$

und

$$b_{ks} = a_{kr}sin(\theta) + a_{ks}cos(\theta),\ \ f\ddot{u}r\ \ k \neq r, s.$$

Durch das Quadrieren der Einträge b_{kr} *und* b_{ks} *ergibt sich durch die Binomischen Formeln und das Additionstheorem der Winkelfunktionen:*

$$\begin{aligned} b_{kr}^2 + b_{ks}^2 = a_{kr}^2 cos^2(\theta) - 2a_{kr}a_{ks}cos(\theta)sin(\theta) + a_{ks}^2 sin^2(\theta) \\ +a_{kr}^2 sin^2(\theta) - 2a_{kr}a_{ks}sin(\theta)cos(\theta) + a_{ks}^2 cos^2(\theta) \\ = a_{kr}^2 + a_{ks}^2 \end{aligned}$$

Da schon Matrix A symmetrisch war, folgt die gleiche Formel auch für

$$b_{rl}^2 + b_{sl}^2 = a_{rl}^2 + a_{sl}^2,$$

insofern $l \neq r, s$ gilt. Somit ist klar, dass die Quadrate der Nichtdiagonalelemente in B und A immer übereinstimmen, auch wenn man die Zeilen und Spalten r, s betrachtet. Übrig bleibt, die Elemente b_{rs} und b_{sr} zu betrachten. Für diese ergibt sich nach (1)*:*

$$b_{rs} = (a_{rr} - a_{ss})sin(\theta)cos(\theta) + a_{rs}(cos^2(\theta) - sin^2(\theta)).$$

Setzt man nun für den Winkel θ verschiedene Werte ein, so ergibt sich zum Beispiel für $\theta = 0$, dass $b_{rs} = a_{rs}$ und für $\theta = \pi/2$, dass $b_{rs} = -a_{rs}$ gilt. Nach dem Zwischenwertsatz weiß man nun, dass es einen Wert für θ geben muss, sodass der Ausdruck für b_{rs} verschwindet. Daraus folgt dann direkt, dass

$$Od(B) = Od(U^T AU) = Od(A) - 2a_{rs}^2 < Od(A)$$

gilt. Dies war die geforderte Bedingung an die Umformung und somit gilt das Lemma.

3 Das Determinantenproblem von Hadamard

Jacuqes Hadamard stellte sich zu seiner Zeit einige Fragen zu den Eigenschaften von Matrizen und stoß mit seiner Forschung häufig auf bis heute ungelöste Probleme. Darunter ist auch die folgende Fragestellung zu finden:

> Wie groß kann die Determinante *det* A auf der Menge aller reellen $(n \times n)$-Matrizen $A = (a_{ij})$ werden, deren Einträge alle $|a_{ij}| \leq 1$ erfüllen?

Zunächst sei erwähnt, dass dieses von Hadamard aufgestellte Problem bis heute keine allgemeine Lösung besitzt. Allerdings ist es möglich, mit Hilfe einiger Vorüberlegungen, möglichst nah an diese obere Schranke der Determinante auf diesen ausgewählten Matrizen zu gelangen. Dies geschieht, sobald man den Spektralsatz zur Hilfe nimmt, wundersamer Weise fast von allein.

3.1 Hadamard-Matrizen

Nun zu den Vorüberlegungen: man verwende ohne genaueren Beweis, dass die Determinantenfunktion stetig und die von Hadmard beschriebene Menge der Matrizen kompakt ist. Auf die Kompaktheit stößt man, wenn man die Matrix in einen Zeilenvektor mit n^2 Einträgen betrachtet. In dieser Form ist es leicht zu sehen, dass jeder einzelne Eintrag durch -1 oder 1 beschränkt ist und jede Folge, die alle ihre Folgenglieder innerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ hat, auch ihren Grenzwert in diesem hat.

Also ist die Menge der Matrizen beschränkt und abgeschlossen und somit nach Heine Borel kompakt. Damit existiert ein Maximum der stetigen Funktion auf der kompakten Menge. Dieses Argument trat nun schon häufiger auf. Außerdem nimmt man o.B.d.A. an, dass A nicht-singulär ist, also keine linear abhängigen Zeilen und Spalten besitzt, da die Determinante einer solchen Matrix stets verschwindet.
Des Weiteren ist klar, dass die Determinantenfunktion linear ist, wenn man nur einen einzelnen Eintrag verändert. So ist es also möglich, jeden einzelnen Eintrag in die Richtung (also ± 1) zu verschieben, sodass der Wert der Determinante größer wird. Die Matrix A mit der maximalen Determinante wird also eine ± 1-Matrix sein.
Nun wird der Zusammenhang zwischen dem Spektralsatz und der Fragestellung von Hadamard klar:
Wenn man anstatt der Matrix A zu einer Matrix $B = A^T A = (b_{ij})$ übergeht und den j-ten Spaltenvektor von A c_j nennt, $c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, dann ist klar, dass B eine symmetrische Matrix ist, da $b_{ij} = \langle c_i, c_j \rangle$. Somit ist der Spektralsatz auf B anwendbar. Doch vorher folgt aus der obigen Überlegung zunächst, dass insbesondere $b_{ii} = \langle c_i, c_i \rangle$ und $Spur(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = n^2$ gilt. Außerdem rechtfertigt man den Übergang zur Matrix B so, dass aufgrund der Rechenregelen der Determinante gilt:

$$det(B) = det(A^T A) \Leftrightarrow det(B) = det(A^T) det(A) \Leftrightarrow det(B) = det(A)^2,$$

also $\sqrt{det(B)} = |det(A)|$, da $det(A^T) = det(A)$. Das bedeutet, dass die größte Determinante von B auch die größte Determinante von A sein muss. Also kann man ebenso nach diesem Maximum für B suchen.
Nun verwendet man, dass es nach dem Spektralsatz eine Matrix $Q \in O(n)$ gibt, sodass

$$Q^T B Q = Q^T A^T A Q = (AQ)^T (AQ) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

gilt. Nun betrachtet man mit d_j den j-ten Spaltenvektor von AQ und für λ_j ergibt sich $\lambda_j = \langle d_j, d_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}^2 > 0$. Die Diagonalelemente von $Q^T B Q$ sind alle also reelle und insbesondere positive Zahlen und man kann ablesen, dass

$$det(B) = \lambda_1 \dots \lambda_n, \; Spur(B) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Aufgrund der Eigenschaften der λ_i's kann man mit Hilfe von der Ungleichung des arithmetischen und geometrischen Mittels folgende Gleichung aufstellen:

$$det(B) = \lambda_1 \dots \lambda_n \leq (\frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{n})^n = (\frac{Spur(B)}{n})^n = n^n$$

Daraus folgt nun $|det(A)| \leq \sqrt{n^n} = n^{n/2}$. Bis auf den Teil der Ungleichung musste man bis hier hin also nur A durch eine symmetrische Matrix ersetzen und verschiedene Eigenschaften dieser beobachten. Dadurch kam man schnell zu der oberen Schranke für die Determinante von A. Um diese nun mit einer Matrix A zu erreichen, genügt es, wenn für alle λ_i $(1 \leq i \leq n)$ gilt, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$. Dann ergibt sich gleichzeitig, dass $Spur(B) = n\lambda = n^2$ gelten muss. Da nach oben aber $Spur(B) = n^2$ gilt, muss $\lambda = n$ gelten. Somit haben alle Diagonaleinträge der Matrix $Q^T BQ$ den gleichen Wert und das Ergebnis ist eine Einheismatrix, welche mit einem Skalar n multipliziert ist:

$$Q^T BQ = nI_n \ oder \ schon \ B = nI_n, \ da \ Q^T = Q^{-1}$$

$$oder \ A^T A = nI_n = AA^T.$$

Dies impliziert folgende Eigenschaft von A mit der maximalen Determinante:

$$|det(A)| = n^{n/2} \Leftrightarrow \langle c_i, c_j \rangle = 0 \ für \ i \neq j.$$

Damit ist die oben geforderte Bedingung, dass $A^T A$ bereits eine Diagonalmatrix sein muss, erfüllt. Ebendiese Matrizen A werden auch $Hadamard - Matrizen$ genannt. Nun bleibt es, sich zu fragen, für welche Ordnungen n es solche Hadarmard-Matrizen gibt. Diese Frage ist allerdings nicht konkret zu beantworten. Eine schnelle Überlegung zeigt, dass es für viele Vielfache von 4 solche Matrizen geben muss, damit die Zeilen und Spalten linearunabhängig zueinander bleiben. Trotzdem ist es nicht gewiss, ob dies für alle Ordnungen, welche Vielfache von 4 sind, gilt. Es ist aber möglich, die Existenz für Matrizen der Ordnung $n = 2^m, \ m \in \mathbb{N}$, also alle Zweierpotenzen, zu zeigen.

3.1.1 Hadamard-Matrizen existieren für alle $n = 2^m$

Beweis 3. *Für eine Menge X sei $|X| = m$ und man nenne die Elemtente der Potenzmenge von X, wobei $|\mathcal{P}(X)| = 2^m$, $C_1, \dots, C_{2^m} \subseteq X$. Diese Aufzählung kann eine beliebige Reihenfolge haben. Nun definiert man die Einträge von $A = (a_{ij})$ durch*

$$a_{ij} = (-1)^{|C_i \cap C_j|}.$$

Um zu wissen, ob A mit dieser Definition wirklich eine Hadarmard-Matrix ist, zeigt man, dass $\langle r_i, r_j\rangle = 0$ *für* $i \neq j$.
Wenn also $r_i und r_j$ *die i-te bzw. j-te Zeile von A sind, dann entahlten sie die Elemente* $r_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ *bzw.* $r_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ *und für das Skalarprodukt ergibt sich dann:*

$$\langle r_i, r_j\rangle = a_{i1}a_{j1} + \ldots + a_{in}a_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{|C_i\cap C_k|}(-1)^{|C_j\cap C_k|} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{|C_i\cap C_k|+|C_j\cap C_k|}.$$

Nun überlegt man sich, dass ein $a \in X$ *genau in der Hälfte aller Mengen* C_i *auftritt. Da diese alle verschieden sind, gilt* $C_i \neq C_j$ *und somit gilt entweder* $a \in C_j \backslash C_j$ *oder* $a \in C_j \backslash C_i$. *Man nehme o.B.d.A. an, dass erstes gilt. Dann teilt man die* C_j *in Paare* $C, C\backslash a$ *auf, sodass jede Teilmenge bei durchlaufendem C erreicht wird. Nun kann man immer zwei Summanden der Summe auf einmal betrachten und es fällt auf, dass für*

$$\sum^{2^{m-1}}((-1)^{|C_i\cap C|+|C_j\cap C|} + (-1)^{|C_i\cap(C\backslash\{a\})|+|C_j\cap(C\backslash\{a\})|})$$

stets $|C_j \cap C| = |C_j \cap (C\backslash\{a\})|$ *und* $|C_i \cap C| = |C_i \cap (C\backslash\{a\})| + 1$ *gilt. Damit haben die beiden Exponenten stets unterschiedliche Parität, also verschwinden die Summanden. Nun ist die Forderung an das Skalarprodukt erfüllt. Außerdem ist klar, dass sich für* $i = j$ *stets das selbe Skalar ergibt und dadurch erhält man für jedes* $n = 2^m$ *eine Hadamard-Matrix.*

3.1.2 Folgerungen

Nach dem obigen Beweis ist es also möglich, für bestimmte Ordnungen n eine solche Hadamard-Matrix zu finden, deren Einträge die Forderungen erfüllen. Diese hat dann stets die größtmögliche Determinante und das war auch die ursprüngliche Fragestellung. Trotzdem beantwortet diese Antwort die Frage nur für vereinzelte Fälle. Es wäre hilfreicher, einen allgemeinen Wert oder zum Bespiel eine untere Schranke zu finden, nachdem die obere direkt zu den Hadamard-Matrizen führte. Und dies ist tatsächlich auch möglich. Diese allgemeine Schranke erhält man auf folgende Weise.

3.2 Eine untere Schranke

Man wählt als Ansatz die Definiton des quadratischen Mittels aller möglichen Determinanten:

$$D_n = \sqrt{\frac{\sum_A (det\ A)^2}{(2^n)^2}}.$$

Die Ungleichung ergibt sich aus einem Widerspruch: Wenn $max_A\ det(A) < D_n$ gelten würde, dann wären alle möglichen Determinanten kleiner dem quadratischen Mittel und somit

$$D_n = \sqrt{\frac{\sum_A (det\ A)^2}{2^{n2}}} < \sqrt{\frac{\sum_A (D_n)^2}{2^{n2}}} = \sqrt{\frac{(2^{n2})(D_n)^2}{2^{n2}}} = D_n.$$

Hier floß ein, dass es genau 2^{n2} Matrizen mit ± 1-Einträgen gibt, da es für jeden der n^2 Einträge jeweils 2 mögliche Einträge gibt. Das bedeutet, dass $max_A det(A) \geq D_n$ gilt.

Nun lohnt es sich, das quadratische Mittel genauer zu betrachten. Denn mit einigen Umformungen erhält man ein überrachend klares Ergebnis. Für die Berechnung der Determinante verwendet man bespielsweise die sog. Leibniz-Formel:

$$\begin{aligned}
D_n^2 &= \frac{1}{2^{n2}} \sum_A (\sum_\pi (sign\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)})^2 \\
&= \frac{1}{2^{n2}} \sum_A \sum_\sigma \sum_\tau (sign\sigma)(sign\tau) a_{1\pi(1)} a_{1\tau(1)} \dots a_{n\sigma(n)} a_{n\tau(n)})^2 \\
&= \frac{1}{2^{n2}} \sum_{\sigma\tau} (sign\sigma)(sign\tau \underbrace{(\sum_A a_{1\pi(1)} a_{1\tau(1)} \dots a_{n\sigma(n)} a_{n\tau(n)})}_{(*)}
\end{aligned}$$

Wobei in den letzten Schritt einging, dass man die Summationen innheralb der Formel vertauschen kann. Aus (*) folgt:

$$\sum_{a_{11}=\pm 1} \sum_{a_{12}=\pm 1} \sum_{a_{nn}=\pm 1} a_{1\pi(1)} a_{1\tau(1)} \dots a_{n\sigma(n)} a_{n\tau(n)},$$

da es für jeden der n^2-Einträge in A die möglichen Werte ± 1 gibt (s.o.). Bis jetzt durchliefen σ und τ unabhängig voneinder alle Permutationen von Matrizen (auf eine genauere Erklärung der Leibniz-Formel wird hier verzichtet). Betrachtet man nun aber eine Permutation und legt fest, dass $\sigma(i) = k \neq \tau(i)$, also die Permutationen unterschiedlich sind, dann ist es möglich, die Summation so zu vertauschen, dass es nur ein Element a_{ik} gibt (da τ an der Stelle i einen anderen Wert hat), sodass $\sum_{a_{ik}=\pm 1} a_{ik} = 0$ ein Faktor in jedem Summanden ist und somit ganz (*) verschwindet. Dies geschieht bei allen möglichen unterschiedlichen Permutationen, außer man setzt $\sigma = \tau$: Dann gilt stets $\sum_{a_{ik}=\pm 1} a_{ik}a_{ik} = 1$ und somit wird jeder Faktor gleich 1. Es ergibt sich also

$$\sum_{a_{11}=\pm 1} \cdots \sum_{a_{nn}=\pm 1} 1 = 2^{n2},$$

was man in die ursrprüngliche Formel einsetzen kann. Außerdem ist $sign(\sigma)^2$ auch stets 1. Also gilt

$$D_n^2 = \frac{1}{2^{n2}} \sum_{\sigma} 2^{n2} = 1 \sum_{\sigma} 1 = n!,$$

da es genau $n!$ Permutationen einer n-elementigen Menge gibt. Insgesamt gilt also:

$$max_A det(A) \geq \sqrt{n!}.$$

Das bedeutet, dass es für jede ± 1-Matrix der Ordnung n eine solche Anordnung der Elemente gibt, sodass der Wert der Determinante größer als $\sqrt{n!}$ ist.

Abschließend bleibt also festzuhalten, dass im Falle der Existenz die Hadamard-Matrizen stets die höchste Determinante der gesuchten Matrizen annehmen. Allerdings ist dies keinesfalls eine allgemeine Anwort, da solche Matrizen nur für vergleichsweise wenige Ordnungen existieren. Viel allgemeiner ist es also, die gezeigte untere Schranke zu bedenken. Diese garantiert eine Matrix mit ± 1 Einträgen, sodass dessen Determinante stets größer als $\sqrt{n!}$ ist. Trotzdem ist es aufgrund dieser theoretischen Überlegungen nicht unbedingt klar, wie solche Matrizen kontruiert werden oder aussehen.

4 Literatur

M. Aigner, G. M. Ziegler, Das Buch der Beweise, Springer, 5. Auflage (S. 45-52)